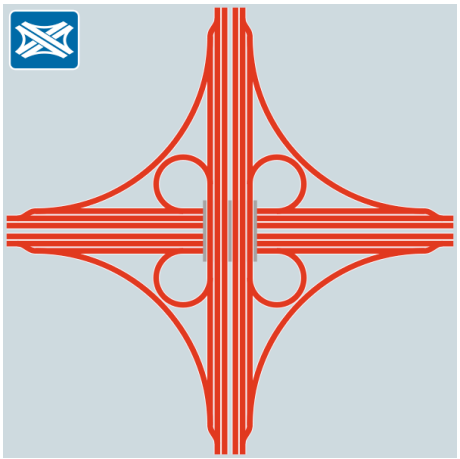
Trassierung von Autobahnkreuzen

1 Einführung

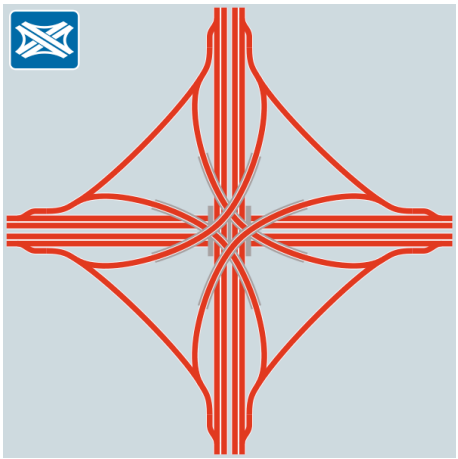
Ein *Autobahnkreuz* ist ein planfreier Knotenpunkt zweier Autobahnen (– „planfrei“ heißt dabei, dass sich die Autobahnen nicht in der derselben Ebene kreuzen, also unter- bzw. übereinander hergeführt werden).

Die folgenden Abbildungen zeigen vier verschiedene Bauformen in vereinfachter typisierter Darstellung.

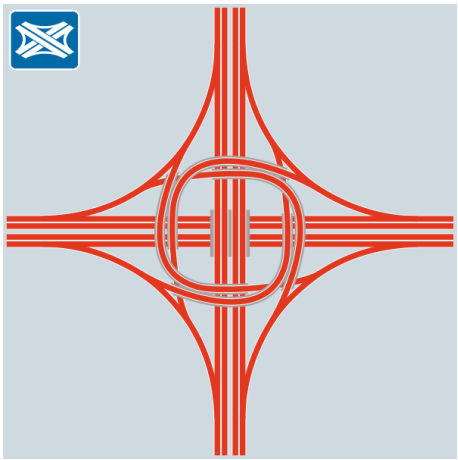
Diskutieren Sie die Varianten hinsichtlich der Kriterien „Platzbedarf“, „mögliche Geschwindigkeiten beim Autobahnwechsel“ und „Kosten durch aufwändige oder viele Brücken".

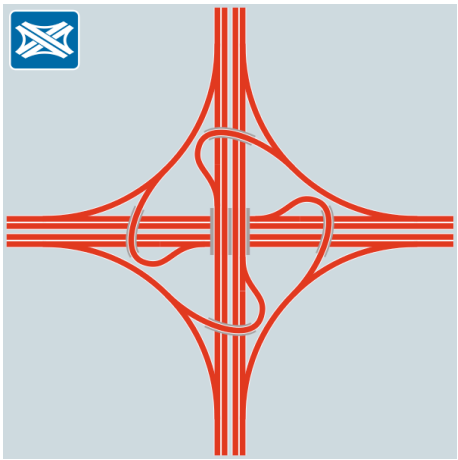


Kleeblatt



Malteserkreuz





Kurven

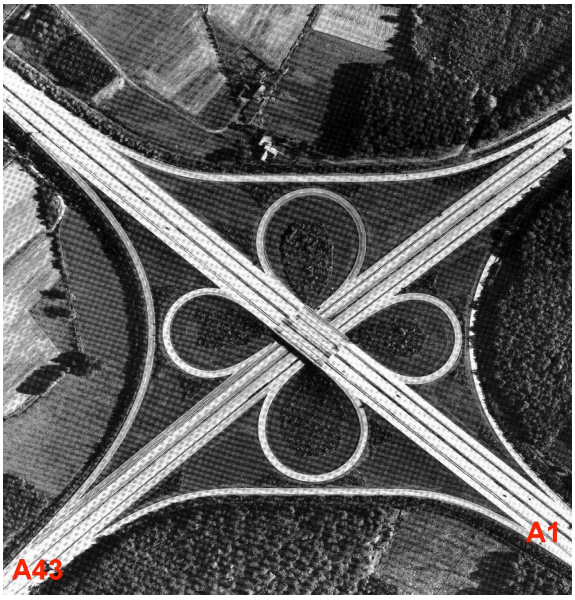
10. Februar 2012

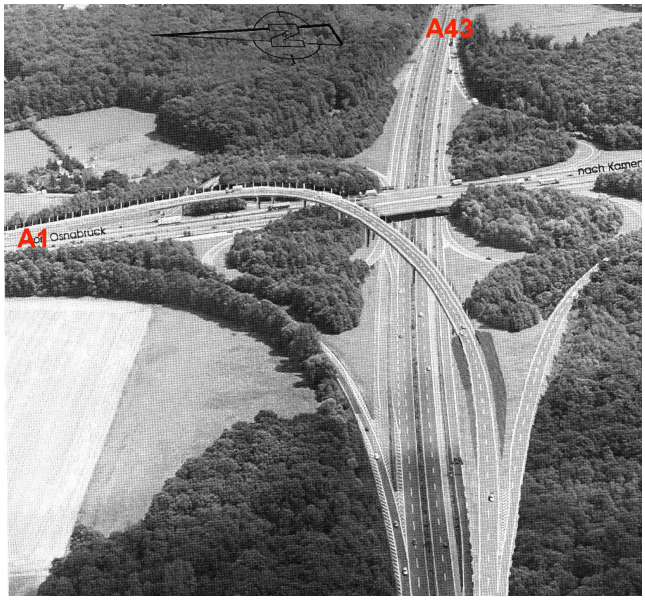
Turbine Windmühle

Das *Autobahnkreuz Münster-Süd* ist ein Autobahnkreuz an den Bundesautobahnen A 1 und A 43 im Südwesten von Münster. Es wird pro Tag schätzungsweise von über 100.000 Fahrzeugen passiert.

Ursprünglich war das Autobahnkreuz in Kleeblattform ausgeführt worden. Aufgrund der Zunahme des Verkehrs aus dem Ruhrgebiet in Richtung Norden über die A 43 und des gleichzeitigen Ausbaus der bisherigen sechsspurigen A 1 zwischen dem Kreuz Münster-Süd und Münster-Nord wurde die Form des Kreuzes jedoch nachträglich verändert.

Anfang des Jahres 2003 begann man, einen Überwurf quer über das Autobahnkreuz hin zur A 1 in Fahrtrichtung Norden zu bauen. Nach fast 2,5 Jahren Bauzeit konnte am 12. August 2005 dieser Überwurf offiziell für den Verkehr freigegeben werden. Der Rest des Autobahnkreuzes wurde in Kleeblattform beibehalten.

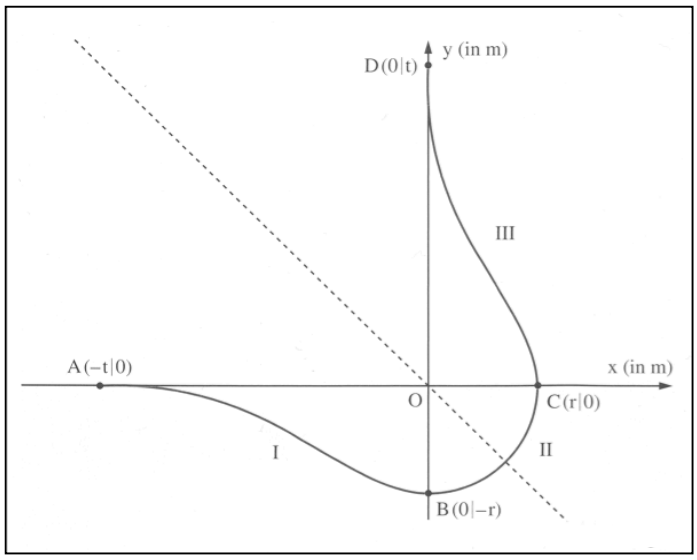




Ziel dieses Moduls ist es, den Verlauf dieser Überwurftrasse (zweidimensional) mathematisch zu modellieren. Dazu sind jedoch in den Kapiteln 2 und 3 zunächst einige Vorüberlegungen erforderlich.

2 Polynominterpolation, sprungfreie und knickfreie Übergänge

Die abgebildete Kurve beschreibe die Linksabbiegung in einem Überwurf-Kreuz. Vereinfachend nehmen wir an, dass das Kreuz rechtwinklig ist und die gesamte Trasse in drei Teile zerlegt werden kann, wobei der mittlere Teil ein Viertelkreis mit dem Radius r ist (vgl. Abbildung auf der nächsten Seite).



Gesucht ist nun zunächst eine ganzrationale Funktion, die die Kurve I beschreibt. In den Punkten A und B ist diese Kurve mit der Fahrbahn der Ausgangs-Autobahn (x-Achse) und dem Kreisbogen II verbunden.

Aus nachvollziehbaren Gründen sollte die Kurve I in A und B lückenlos anschließen (sprungfreier, d.h. stetiger Übergang). Zusätzlich fordert man, dass sich in diesen Punkten kein Steigungssprung ergeben soll, damit das Lenkrad nicht plötzlich „herumgerissen" werden muss. Die beiden sich treffenden Kurven sollen also im Übergangspunkt die gleiche Steigung besitzen (knickfreier, d.h. differenzierbarer Übergang). Schließlich fordert man noch, dass A ein Wendepunkt sein soll – das glättet den Übergang.

Begründen Sie zunächst, dass sich der Viertelkreis im Kurventeil II durch die Funktion $k_r(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$, $0\le x\le r$ *beschreiben lässt.*

Stellen Sie Bedingungen für eine ganzrationale Funktion $f_{r;t}$ *auf, die in Abhängigkeit von r und t den Kurvenverlauf I beschreibt. Begründen Sie, dass man 5 Bedingungen erhält und sich so eine ganzrationale Funktion 4. Grades bestimmen lässt, die die Bedingungen erfüllt.*

Dieses Verfahren, aus vorgegebenen Daten ein passendes Polynom abzuleiten, nennt man „Polynominterpolation".

Das Gleichungssystem, das sich ergibt, kann noch per Hand gelöst werden, ist aber schon einiger Aufwand… – Verwenden Sie besser ein CAS (wie z.B. Derive).

Zeigen Sie, dass sich ergibt:. $f_{r;t}(x)=\frac{3r}{t^4}x^4+\frac{8r}{t^3}x^3+\frac{6r}{t^2}x^2-r$, $-r\le x\le 0$.

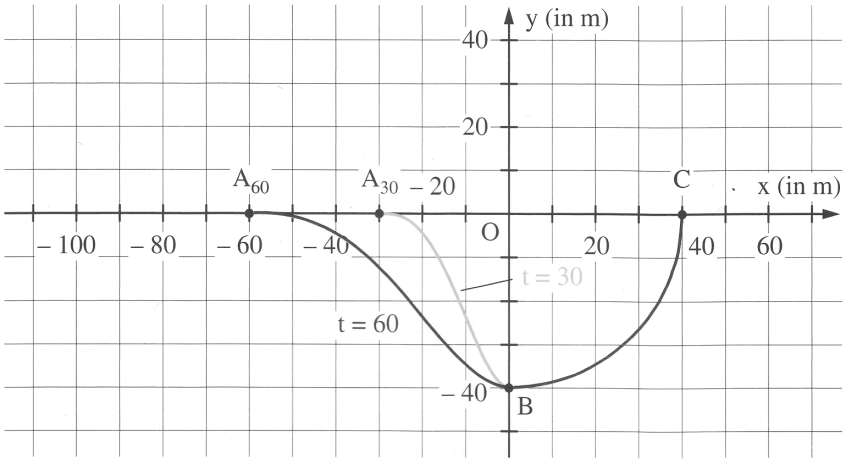
Hilfestellung zur Verwendung von Derive:

Geben Sie die Gleichungen ein (- diese werden vom Programm mit #1, #2 usw. bezeichnet.) Verwenden Sie

dann den Befehl "System" im Menü "Lösen": Hier können Sie anstatt der Gleichungen einfach die Zeilenbezüge #1, #2 usw. eingeben.) – Eine Lösungsdatei finden Sie auch auf www.langemathenacht.de.

3 Krümmung, ruckfreie Übergänge

Die Abbildung zeigt, dass zu einem festen r (in der Abbildung r = 40m) die Übergänge im Punkt B trotz Stetigkeit und Differenzierbarkeit für verschiedene t unterschiedliche Qualität besitzen. Deshalb sind weitere Überlegungen erforderlich, um den Übergang möglichst „ruckfrei" zu gestalten.



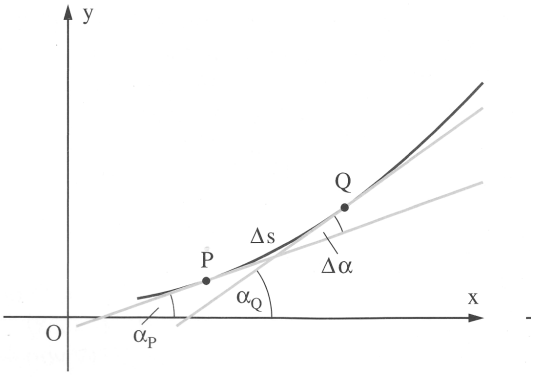
Falls Sie möchten: Stellen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms (z.B. Derive) oder Ihres Taschenrechners die Trassen I und II für r = 40m und verschiedene t dar. Versuchen Sie, ein augenscheinlich möglichst gut passendes t zu ermitteln.

Hilfestellung zur Verwendung von Derive:

Sie können die Funktionsgleichungen in einem normalen Algebra-Fenster eingeben, öffnen Sie zusätzlich ein 2D-Graphik-Fenster im Menü "Fenster" – dort können Sie auch einstellen, dass beide Fenster nebeneinander angeordnet werden. Wenn Sie eine Funktionsgleichung markiert haben, können Sie im Graphik-Fenster die ausgewählte Funktion mit dem Befehl "Graph" im Menü "Einfügen" zeichnen.

Während r die Lage der Punkte B und C festlegt, beeinflusst t die Lage von A und das „Krümmungsverhalten" der Trasse I im Punkt B. Vereinfacht ausgedrückt beschreibt die Krümmung, wie schnell sich die Steigung einer Funktion in einem Bereich ändert.

Um ein Maß für die Krümmung zu bekommen, betrachtet man die Richtungsänderung $\alpha_Q - \alpha_P = \Delta\alpha$ im Verhältnis zu dem Stück Δs („Bogenlänge") des Graphen zwischen zwei Punkten P und Q (vgl. Abb.).



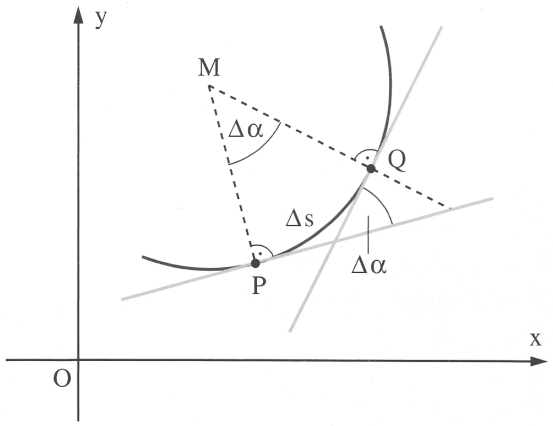
Die Krümmung *k* eines Graphen in einem Punkt wird dann definiert als

$$k := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

(Δ steht für "Differenz", k beschreibt also quasi das Ausmaß, in dem sich die Richtung

des Graphen auf einer bestimmten Länge verändert. Durch den Limes wird diese Eigenschaft zu einem "punktuellen" Maß an einer Stelle.)

Im Falle eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r ist der Winkel zwischen den Tangenten gleich dem Mittelpunktswinkel bei M (– *warum?*).



Begründen Sie:

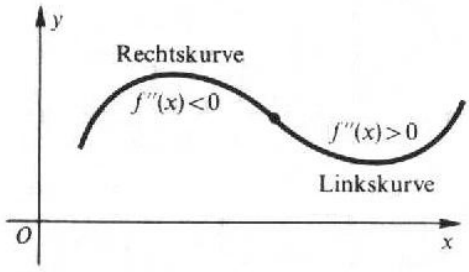
i) Misst man alle Winkel im Bogenmaß, so gilt $\Delta s = r \cdot \Delta\alpha$.

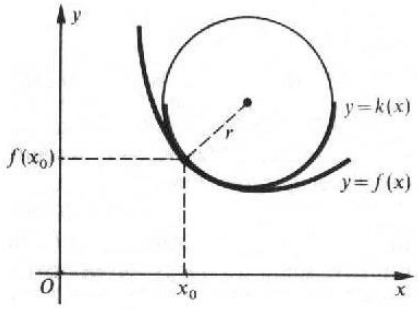
ii) Für einen Linkskreis ergibt sich mit der Definition die Krümmung $k = \frac{1}{r}$.

Bei einem Rechtskreis ergibt sich analog $k = -\frac{1}{r}$ ($\Delta\alpha$ hat dann negatives Vorzeichen).

Die bisherige Definition der Krümmung verdeutlicht zwar gut, was „Krümmung" bedeutet, ist aber unhandlich, wenn man konkret die Krümmung im Punkt eines Funktionsgraphen berechnen will.

Um eine handlichere Formel zur Berechnung der Krümmung einer Kurve zu erhalten, betrachten wir in einem Kurvenpunkt $(x_0;y_0)$ denjenigen Kreis, der die Kurve dort berührt und auch – wenn man den Kreis als Funktionsgraphen auffasst – in den ersten beiden Ableitungen mit der Kurve übereinstimmt. Der Kreis beschreibt die Kurve dann lokal sehr gut, als Krümmung der Kurve in dem Punkt kann man dann die Krümmung des Kreises annehmen.





<u>Voraussetzungen an f:</u>

1. f muss auf einem Intervall I zweimal differenzierbar sein und $x_0 \in I$.
2. Ferner sei $f''(x_0)>0$ (Linkskurve) oder $f''(x_0)<0$ (Rechtskurve), der Fall $f''(x_0)=0$

(z.B. in einem Wendepunkt) ist ausgeschlossen *(– warum?)*.

Erinnerung: Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(x_M;y_M)$ und dem Radius r wird beschrieben durch die Koordinatengleichung

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2.$$

Die Kreislinie besteht also aus allen Punkten $(x;y)$, die die Gleichung erfüllen. (Falls Ihnen dies neu ist, fertigen Sie eine Skizze an und verwenden Sie den Satz des Pythagoras.)

Zeigen Sie, dass zweimaliges Ableiten der Kreisgleichung (y = k(x)) auf die folgenden Gleichungen führt:

$$(x-x_M)+(k(x)-y_M)\cdot k'(x)=0$$
$$1+[k'(x)]^2+(k(x)-y_M)\cdot k''(x)=0$$

Es soll nun der zu einem Kurvenpunkt $(x_0;y_0)$ „passende“ Kreis ermittelt werden (s.o.).

Begründen Sie den Ansatz $k(x_0)=f(x_0) \wedge k'(x_0)=f'(x_0) \wedge k''(x_0)=f''(x_0)$ und machen Sie sich klar, dass er auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$(x_0-x_M)^2+(f(x_0)-y_M)^2=r^2$$
$$\wedge\quad (x_0-x_M)+(f(x_0)-y_M)\cdot f'(x_0)=0$$
$$\wedge\quad 1+[f'(x_0)]^2+(f(x_0)-y_M)\cdot f''(x_0)=0$$

Dieses LGS enthält als Unbekannte die drei Informationen über den gesuchten Kreis (y_M,x_M,r). Durch Lösen ergibt sich für den Radius („Krümmungsradius“) des gesuchten Kreises („Krümmungskreis“):

$$r=\frac{\left(\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}\right)^3}{|f''(x_0)|}$$

Begründen Sie, dass sich somit für die Krümmung k des Graphen von f im Punkt (x_0;y_0) ergibt:

$$k=\frac{f''(x_0)}{\left(\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}\right)^3}$$

Was können Sie demgemäß aussagen über die Krümmung in Linkskurven (in Rechtskurven / in Extrempunkten / in Wendepunkten / bei Geraden)?

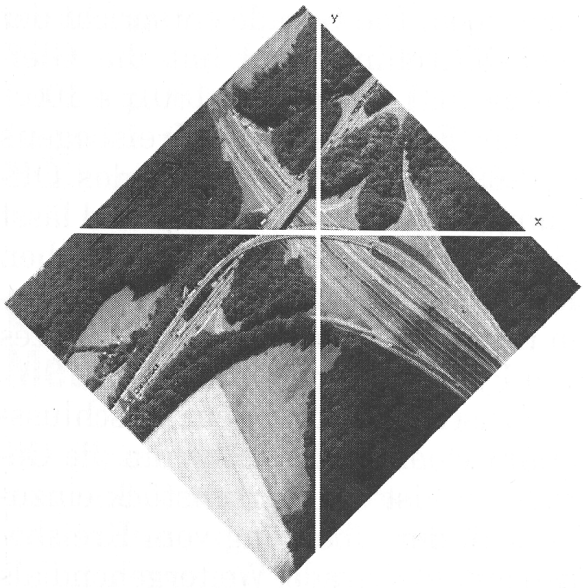
Für das obige Beispiel mit ist es nun möglich, zu gegebenem r die Variable t so zu wählen, dass der Übergang in B nicht nur sprungfrei und knickfrei, sondern auch noch „ruckfrei“ (ohne Krümmungssprung) erfolgt.

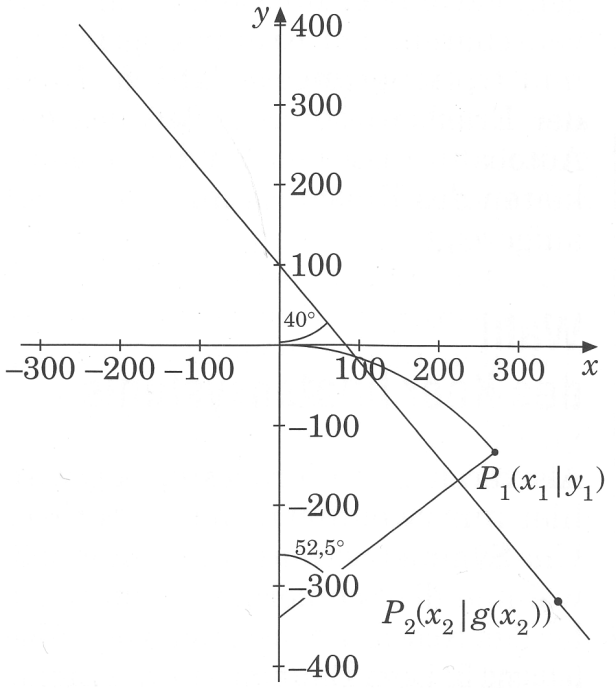
Ermitteln Sie für r = 40m die Kreiskrümmung und suchen Sie ein t, für das die Kurve I in B

einen möglichst geringen Krümmungssprung aufweist.

4 Der Überwurf im Autobahnkreuz Münster-Süd

Nach diesen Vorüberlegungen nun zurück zur Überwurftrasse des Autobahnkreuzes Münster-Süd (vgl. Einführung). Um Symmetrien nutzen zu können wählen wir das Koordinatensystem so wie in der linken Abbildung: Die Überwurftrasse verläuft dann symmetrisch zur y-Achse. Außerdem modellieren wir der Einfachheit halber nur die Mittellinien der Fahrbahnen.





Aus dem Bauplan von der Straßenbauverwaltung kann man entnehmen, dass der „Kreuzungspunkt" der A1 und A43 dann 100m oberhalb des Koordinatenursprungs liegt (was auf dem Foto wegen der perspektivischen Verzerrung nicht zu erkennen ist). Der Schnittwinkel zwischen A und A43 kann mit 80° abgemessen werden.

Orientieren Sie sich in dem abgebildeten Koordinatensystem und machen Sie sich klar, dass die A43 bereits eingezeichnet ist. Zeichnen Sie zusätzlich die A1 ein. Skizzieren Sie den groben Verlauf der Überwurftrasse.

Wie im Beispiel der Vorüberlegungen besteht die Überwurftrasse aus drei Teilen, wobei die Teile I und III spiegelbildlich zur y-Achse liegen und Teil II durch einen Kreisbogen modelliert werden kann, welcher laut Bauplan einen Radius von 340 m und einen Öffnungswinkel von 105° aufweist. Wir beschränken uns im Folgenden darauf den Teil I, also den Verlauf zwischen P_1 und P_2 zu untersuchen.

Begründen Sie, dass sich für die Kreisgleichung des Mittelteils der Trasse und für die Geradengleichung der A 43 folgende Gleichungen ergeben:

$K: x^2 + (y+340)^2 = 340^2$ $\qquad g(x) = \tan(130°)x + 100 = \tan(\frac{13}{18}\pi)x + 100$

Der Punkt P_1 hat die Koordinaten $P_1(269\,|\,-133)$.

Geben Sie die Vorgehensschritte an, mit denen man diese Koordinaten ermitteln kann.

Und nun zum Anschlussstück zwischen P_1 und P_2 (x_2|g(x_2)). Die Verbindungskurve hängt natürlich von der Wahl von P_2 ab und soll so gewählt werden, dass die Übergänge in P_1 und P_2 sprungfrei, knickfrei und ruckfrei sind (also stetig, differenzierbar und ohne Krümmungssprung).

Sie erhalten 6 Bedingungen, der Ansatz ist also $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.

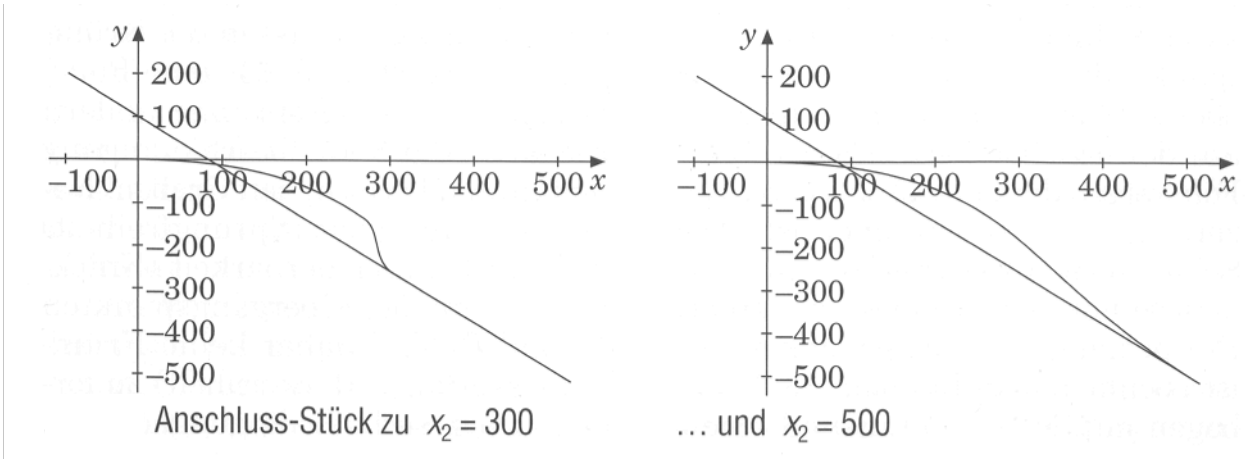
Stellen Sie alle Bedingungen und Bestimmungsgleichungen auf und ermitteln Sie jeweils eine Funktionsgleichung für f mit Hilfe eines CAS (z. B. Derive) für $x_2 = 300$ und $x_2 = 500$.

<u>Hilfestellung bei der Verwendung von Derive:</u>
Geben Sie die Gleichungen ein und verwenden Sie dabei den Parameter t für die Stelle x_2. (Die Gleichungen werden vom Programm mit #1, #2 usw. bezeichnet.) Ergänzen Sie dann eine 7. Gleichung zur Festlegung von t, z. B. "t=300".
Verwenden Sie den Befehl "System" im Menü "Lösen": Hier können Sie anstatt der Gleichungen einfach die Zeilenbezüge #1, #2 usw. eingeben. Wählen Sie "Ok" und dann den Befehl "Approximieren" im Menü "Vereinfachen". – Eine Lösungsdatei finden Sie auch auf www.langemathenacht.de.

Kommen Sie auf die richtige Lösung? – Es ergeben sich:

$$f_{300}(x) \approx -1{,}78 \cdot 10^{-5} \cdot x^5 + 0{,}0253 \cdot x^4 - 14{,}37 \cdot x^3 + 4078{,}2 \cdot x^2 - 5{,}78 \cdot 10^5 \cdot x + 3{,}28 \cdot 10^7$$

$$f_{500}(x) \approx -1{,}53 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 + 2{,}28 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 - 1{,}09 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 0{,}0119 \cdot x^2 + 2{,}12 \cdot x - 429{,}45$$



Aber welcher Anschlusspunkt P_2 soll gewählt werden?

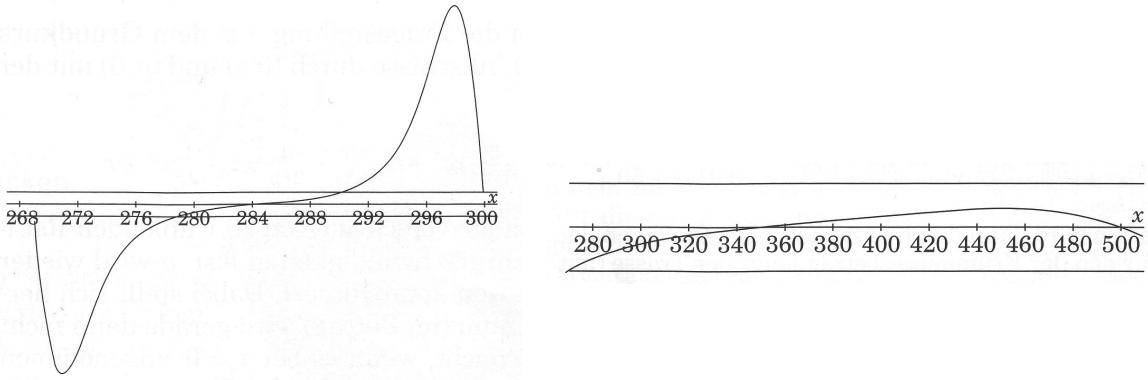
Natürlich soll die Linksabbiegung möglichst „leistungsfähig" sein. Das ist dann der Fall, wenn die

Fahrzeuge mit möglichst hoher Geschwindigkeit durch das Kreuz fahren können.

Die erlaubte Maximalgeschwindigkeit ist prinzipiell von der Krümmung der Trasse abhängig und laut den Richtlinien für die Anlage von Straßen für einen Kreis mit dem Radius 340 m auf 90 km/h beschränkt. Diese Durchfahrgeschwindigkeit sollte nun auf den anderen Teiltrassen I und III nicht kleiner sein bzw. die Krümmung sollte dort (im Betrag) nicht größer sein.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Krümmungsverläufe der Trassenführungen im Bereich I (Abbildungen der vorigen Seite), die dich für die P_2-Anschlussstellen $x_2 = 300$ und $x_2 = 500$ ergeben. Die zusätzlich eingezeichneten Parallelen zur x-Achse zeigen 1/340 bzw. -1/340.

Vergleichen und diskutieren Sie die Krümmungsverläufe.

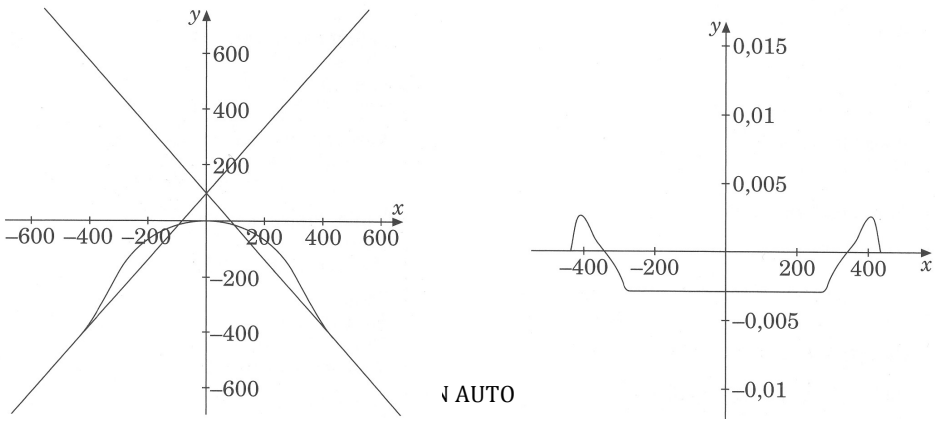


Während bei $x_2 = 300$ der Kreiskrümmungsbetrag deutlich überschritten wird, ist mit $x_2 = 500$ die Geschwindigkeit auf dem Trassenteilstück I nicht weiter eingeschränkt. Allerdings sollte die Krümmung in diesem Bereich auch den Betrag 1/340 erreichen, damit die Trasse – aus ökonomischen und ökologischen Gründen – möglichst kurz wird.

Wenn man x_2 systematisch variiert, erhält man als Optimum $x_2 \approx 435$ und als zugehörige Funktionsgleichung

$$f(x) = -2{,}30 \cdot 10^{-9} \cdot x^5 + 3{,}92 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 - 0{,}0026 \cdot x^3 + 0{,}402 \cdot x^2 - 133{,}11 \cdot x + 8274{,}84$$

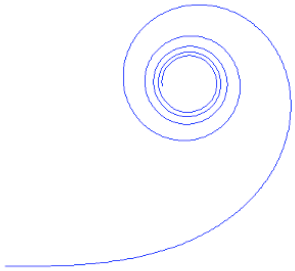
Die Linkstrasse verläuft dann wie in der folgenden linken Abbildung, der entsprechende Krümmungsverlauf (rechte Abbildung) überschreitet den Wert 1/340 nicht, erreicht ihn aber. Tatsächlich ist dieser Verlauf eine gute Näherung an den tatsächlich realisierten.



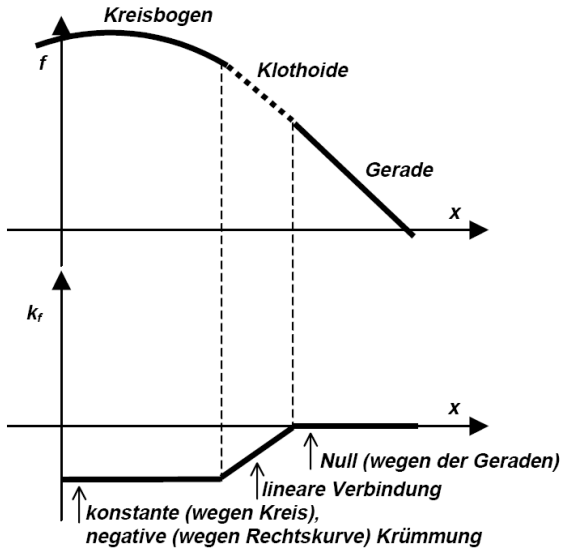
Additivum: Krümmungsübergänge in der Realität

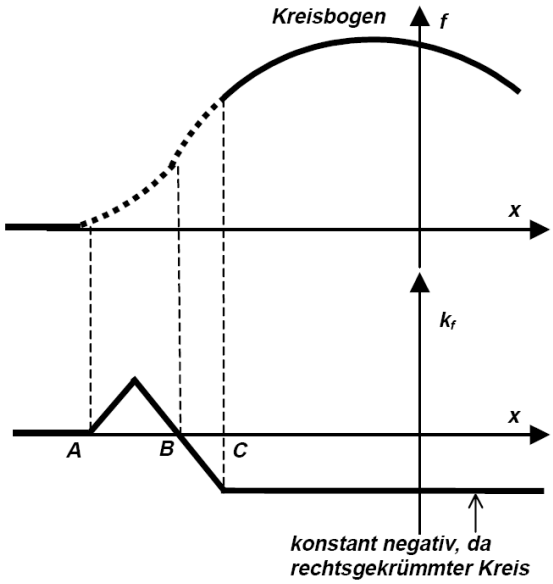
Bei der Verwendung von geeigneten Polynomen können Krümmungssprünge zwar vermieden werden, durch die Verbindung von linear und kreisförmig verlaufenden Teilstücken kann die Krümmungsänderung im Bereich der Übergangsstellen unter Umständen aber dennoch recht stark sein.

In der Realität modelliert man deshalb eine Trasse nicht nur ohne Krümmungssprünge, sondern auch mit einem Übergangsbereich linearer Krümmungsänderung. Als Übergangsbogen verwendet man einen Teile einer sogenannten *Klothoide*.



Eine Klothoide ist eine Spirallinie, deren Krümmung linear ansteigt und somit einen „weichen" Übergang zwischen Gerade und Kreisbogen ermöglicht. (→ Sie erfahren Näheres zu Spiralen durch einen Austausch mit jemandem aus dem Modul “Spiralen”.)



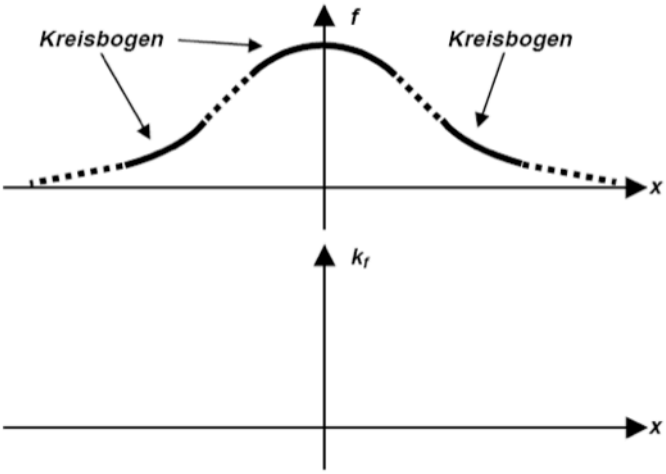


Zur Klothoidenkrümmung der rechten Abbildung:

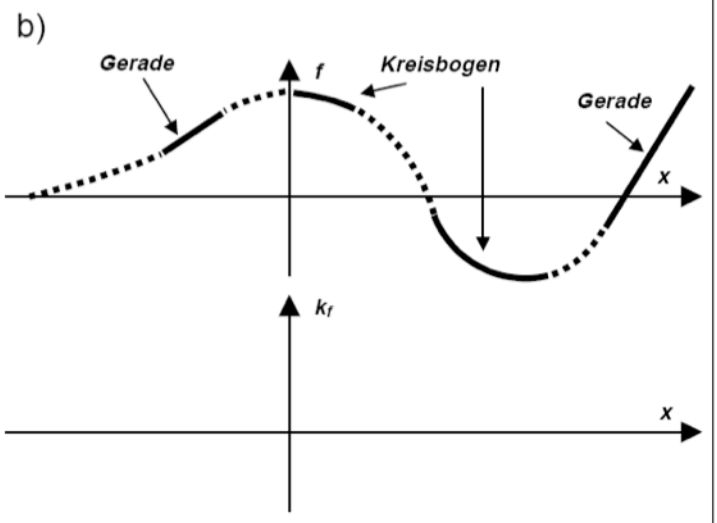
An die Geradenkrümmung 0 schließt die Klothoide in A an. Wegen der Linkskurve muss die Krümmung zunächst positiv werden, sie steigt zunächst linear an. Nach einem Maximalwert (der der Kurve nicht anzusehen ist), fällt sie linear ab, und im Wendepunkt an der Stelle B ist die Krümmung wieder Null. Da eine Rechtskurve folgt, fällt die Krümmung (linear) ins Negative, um an der Stelle C stetig in die Kreiskrümmung überzugehen.

Skizzieren Sie die Krümmungsverläufe.

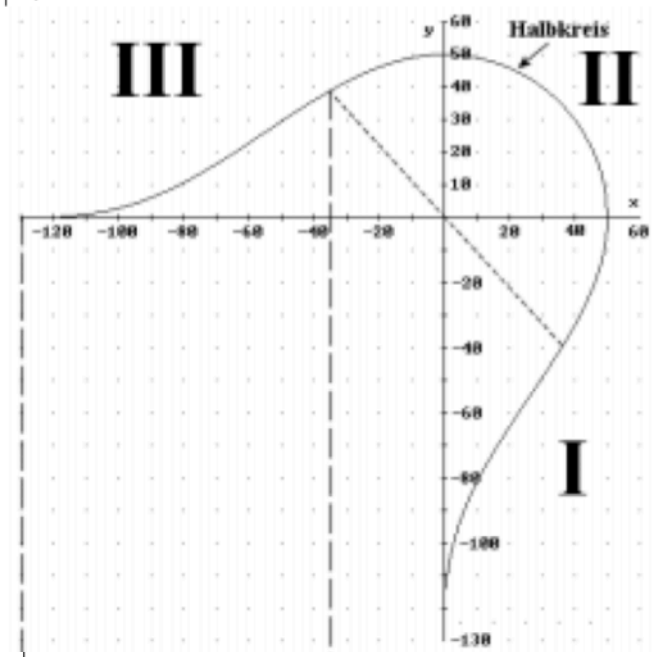
a)

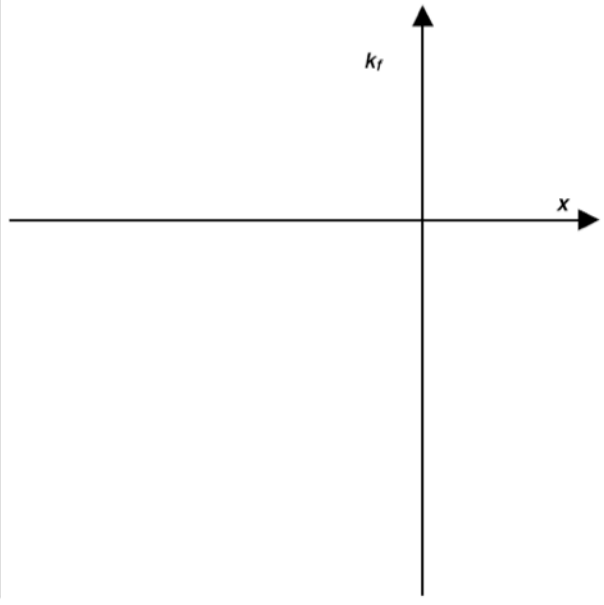


b)

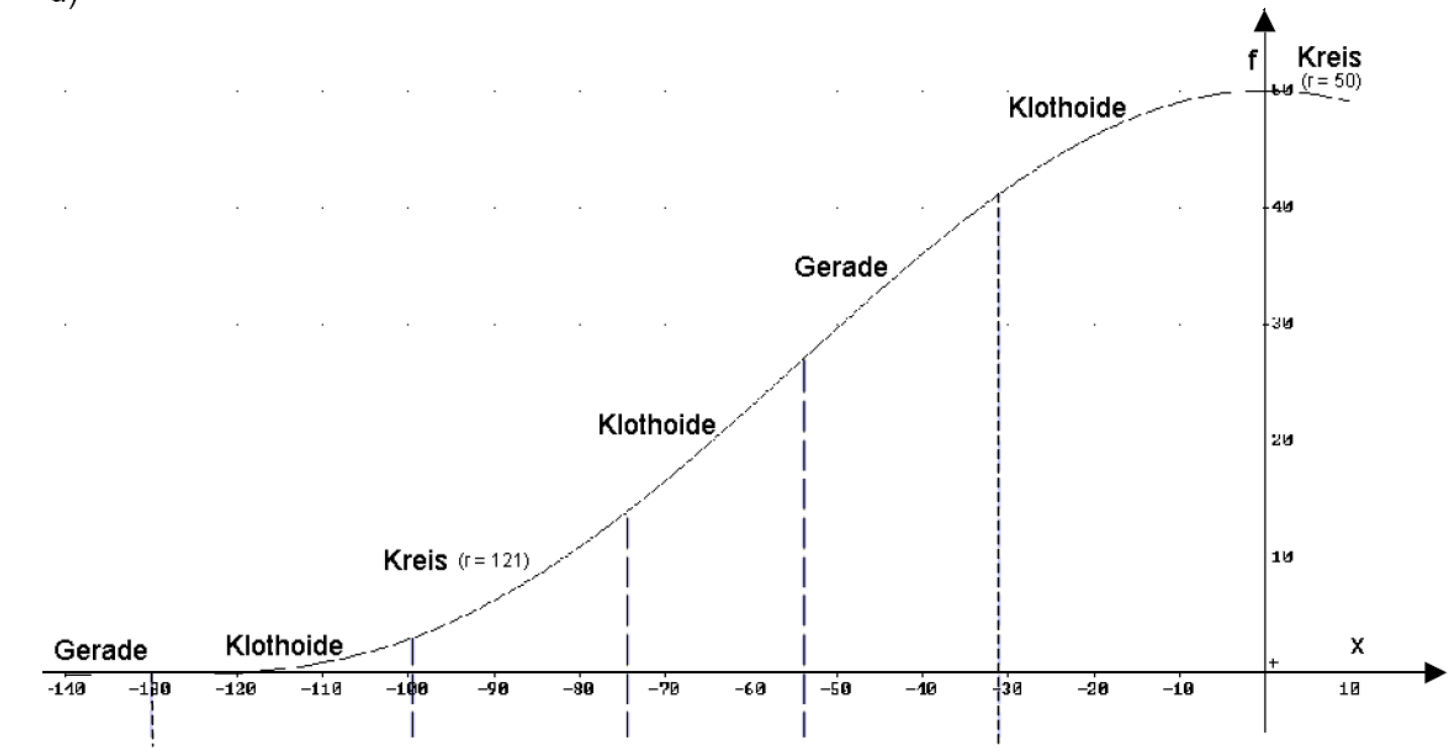


c)





d)


f
Kreis
(r = 50)
Klothoide
Gerade
Klothoide
Kreis (r = 121)
Gerade
Klothoide
X
-140
-130
-120
-110
-100
-90
-80
-70
-60
-50
-40
-30
-20
-10
10
40
30
20
10

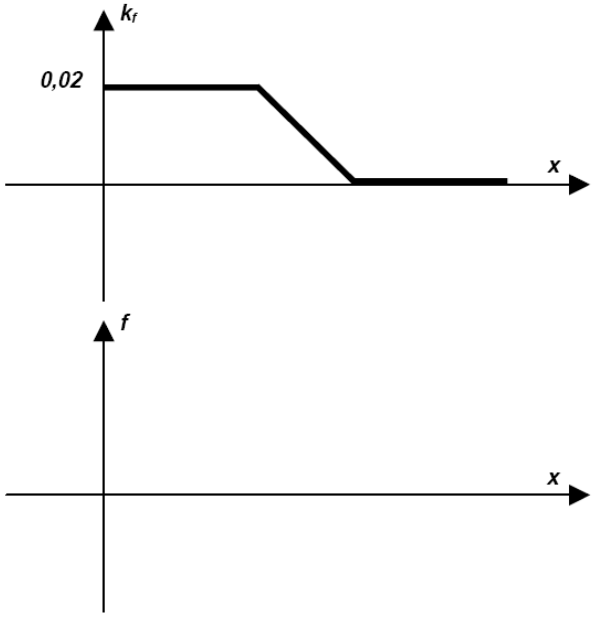

k_f
x

Kurven

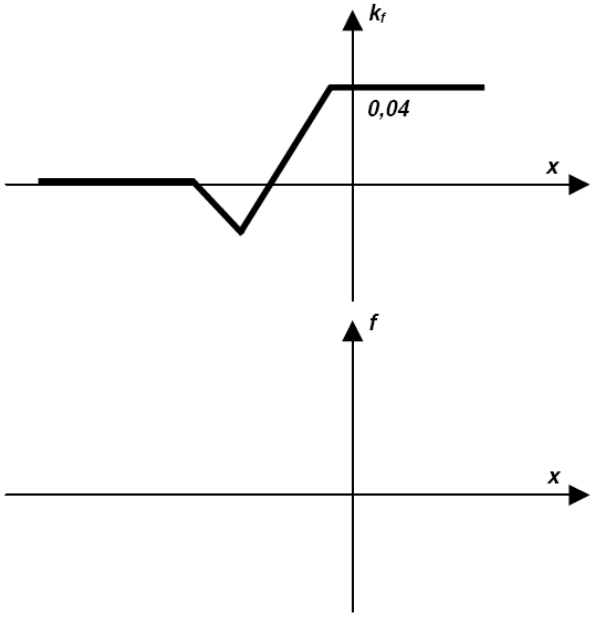
10. Februar 2012

Skizzieren Sie einen sprung- und knickfreien Trassenverlauf zu den Krümmungsgraphen. Entsprechen diese den fahrtechnischen Anforderungen an Hochgeschwindigkeitstrassen?

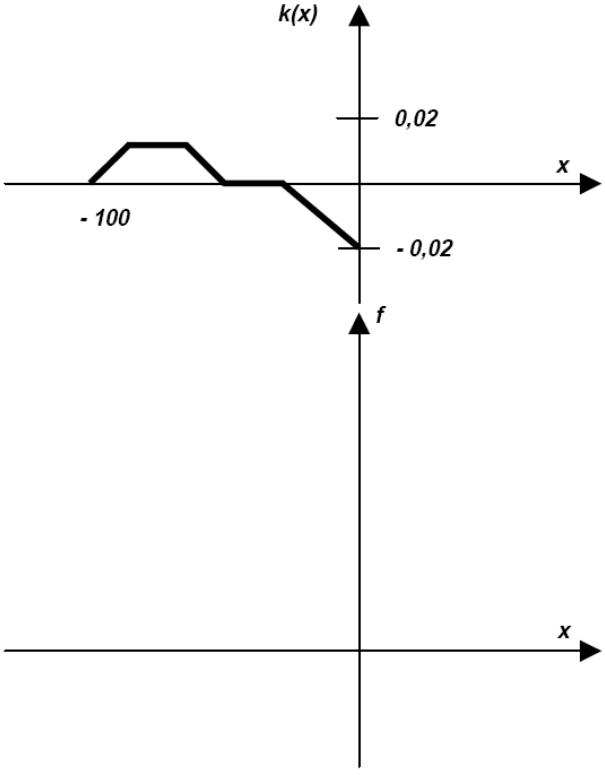
a)



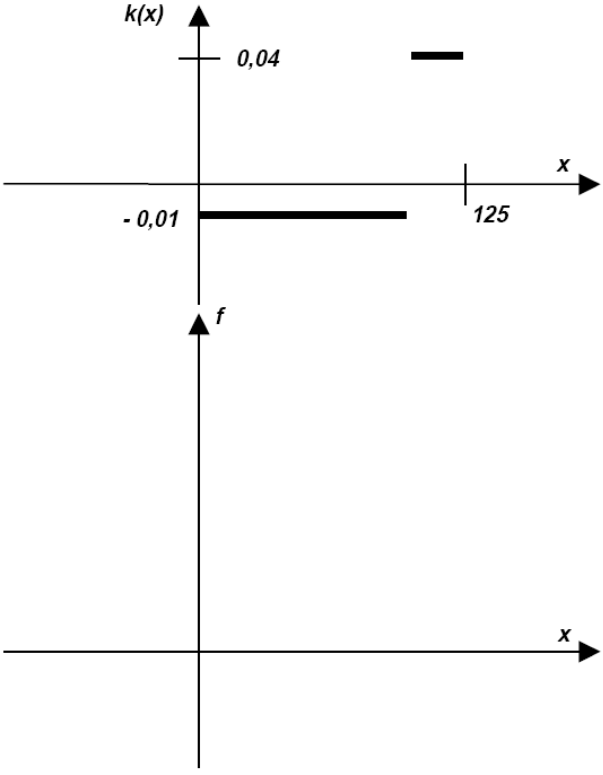
b)



c)

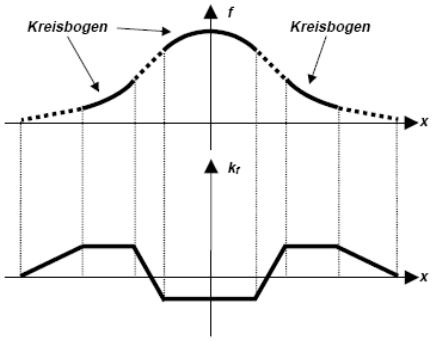


d)

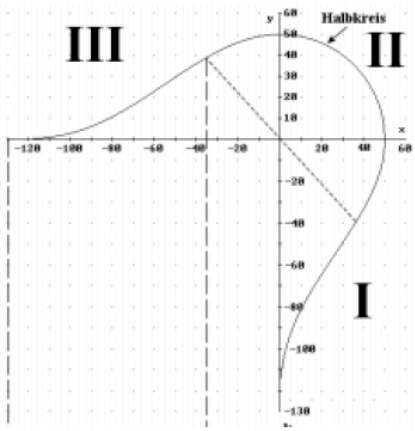


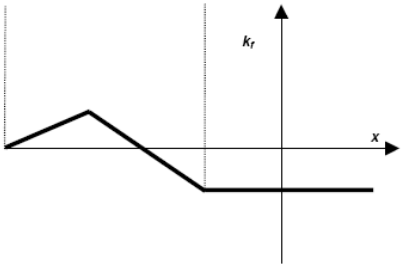
Lösungen

a)

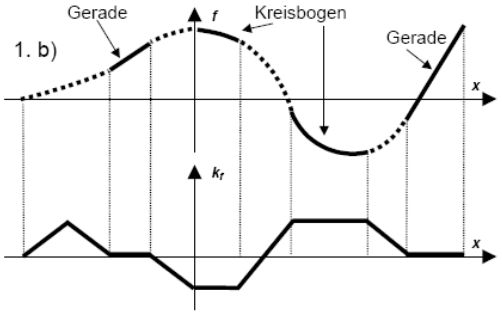


c)

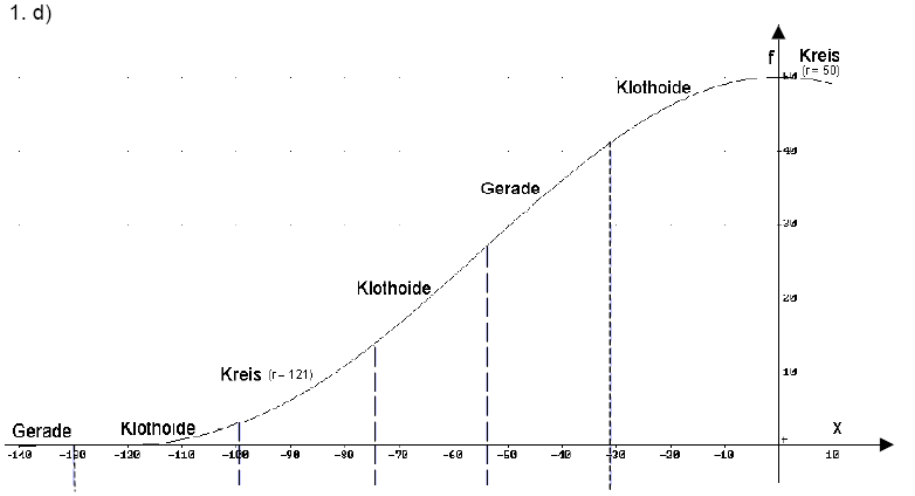


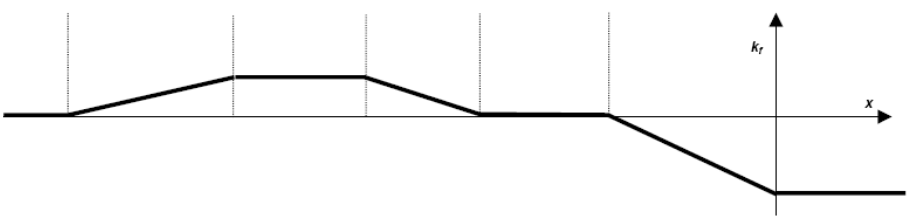


1. b)

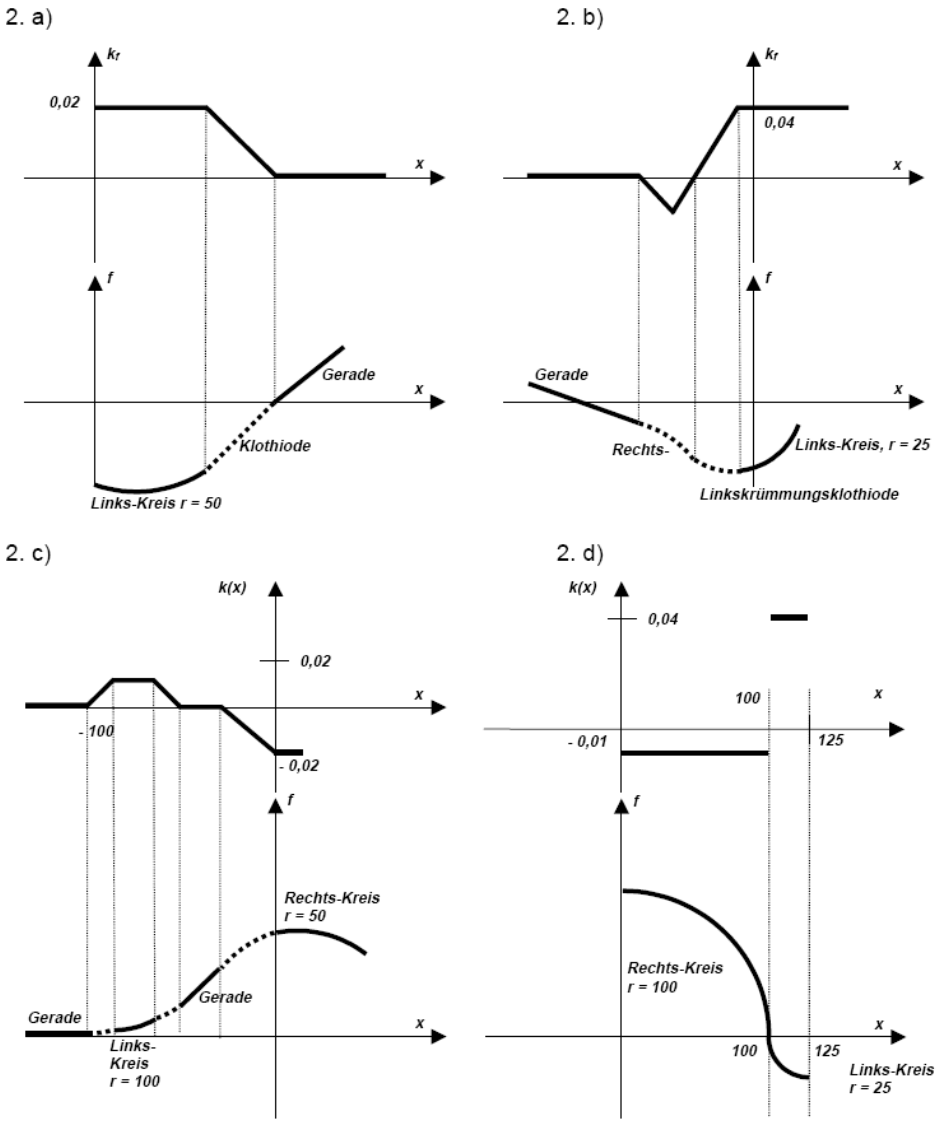


1. d)





Für alle Trassen in a bis d ist nur der Krümmungsverlauf vorgegeben und damit die Trassenelemente Gerade, Kreis und Klothoide; die beiden letzten mit Links- oder Rechtskrümmung. Die Lage dieser Elemente im Koordinatensystem ist durch $k_r(x)$ nicht festgelegt. Insofern sind die Lösungen immer nur mögliche Beispiele.



a, b, c sind (nach der Aufgabenstellung) sprung- und knickfrei und die Krümmungsgraphen haben keine Sprünge. Sie entsprechen allen fahrtechnischen Anforderungen. Die Trasse zu d ist zwar (wie verlangt) sprung- und knickfrei, hat aber im Übergang der beiden Kreisbögen einen Krümmungssprung. Sie ist nicht als Hochgeschwindigkeitstrasse geeignet.

<u>Quellen</u>

LS 11, Stuttgart 2000, S. 158f.

Heinz Böer, Das Autobahnkreuz Münster-Süd. In: Mathematik lehren 130, S. 59-63

SMIMS (Schülerakademie für Mathematik und Informatik Münster, Leitung Heinz Böer), Online-Material unter http://www.smims.nrw.de/homepage2002/projekte/projekt5/index5.html (Dezember 2011)

Anhang

Bestimmungsgleichungen zur Modellierung der Überwurftrasse in 4:

Sprungfreiheit (Stetigkeit in P_1 und P_2)

$$f(269) = -133 \text{ und } f(x_2) = g(x_2) = \tan(\tfrac{13}{18}\pi)x_2 + 100$$

Knickfreiheit (Differenzierbarkeit in P_1 und P_2)

$$f'(269) = -\frac{1}{\tan(\frac{5}{24}\pi)} \approx -1,30 \text{ und } f'(x_2) = a_{43}'(x_2) = \tan(\tfrac{13}{18}\pi)$$

Ruckfreiheit (keine Krümmungssprünge in P_1 und P_2)

$$\frac{f''(269)}{(1+f'(269)^2)^{1,5}} = -\frac{1}{340} \text{ und } \frac{f''(x_2)}{(1+f'(x_2)^2)^{1,5}} = 0$$